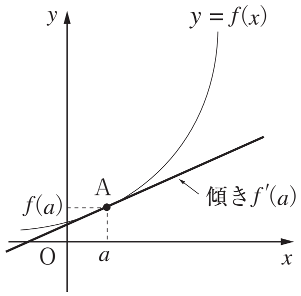
第15講　接線の方程式，関数の増減と極大・極小

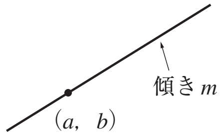
§1 ▶ 接線の方程式

要点整理 と 公式

要点1 接線の方程式



関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $A(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ で表される。$f'(a)$ は，$f(x)$ を微分して得られる導関数 $f'(x)$ に $x=a$ を代入して求めることができる。



また，点 $(a,\ b)$ を通り，傾き m の直線の方程式は，

$y-b=m(x-a)$，つまり $y=m(x-a)+b$ と表される。

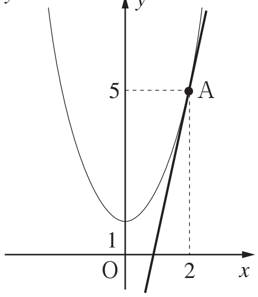
よって，次のことがいえる。

■ 接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $A(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

(ex) 関数 $f(x)=x^2+1$ 上の点 $A(2,\ 5)$ における接線の方程式を求める。



$f'(x)=$

よって，$f'(2)=$　　　　　　　より，

点Aにおける接線の傾きは「　　」である。

したがって，点Aにおける接線の方程式は

$y=$　　$(x-$　　$)+$

つまり　　　　　　　　　　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　関数 $y = -x^2 + 5x - 6$　のグラフ上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

［2］　曲線 $y = 2x^2 + 3x + 1$　について，傾きが -5 である接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

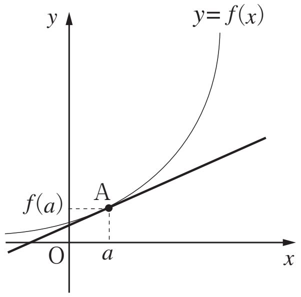
接線の方程式

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の

傾きは $f'(a)$

接線の方程式は　　$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

である。点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ は接線の「 接点 」である。



接点の x 座標がわかっているとき

→　導関数 $f'(x)$ を求め，接点の x 座標を代入して接線の傾きを求めることができる。

接線の傾きがわかっているとき

→　導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x) =$ (接線の傾き) という方程式を解くことで，

接点の x 座標を求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

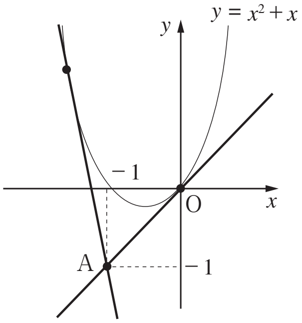
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 曲線上にない点を通る接線

要点整理 と 公式

要点2 曲線上にない点から引いた接線の方程式

関数 $y = x^2 + x$ のグラフに，点 A$(-1,\ -1)$ から引いた接線の方程式を求める。



$f(x) = x^2 + x$ とおくと，$f'(x) =$ 　　　　である。

ここで，点 A は「接点とは限らない」ため，その x 座標 -1 を用いて接線の傾きが $f'(-1) = -1$ とすることはできない。

よって，接点の x 座標を「文字でおく」ことにより，その文字を用いて接線の傾きや接線の方程式を表し，その方程式が点 A を通るときの接点の x 座標を求める。

接点の x 座標を「　　」とおくと，接点の y 座標は　　　　　となる。

また，点 $(t,\ t^2 + t)$ における接線の傾きは

$f'(\quad) =$

である。よって，点 $(t,\ t^2 + t)$ における接線の方程式は

$y = (\qquad)(x - \quad) +$

となる。この式を $y = mx + n$ の形に整理すると

$y = (2t + 1)(x - t) + t^2 + t$

つまり，$y = (2t + 1)x - t^2$ …① となる。

この直線が，点 A$(-1,\ -1)$ を通るので，

$-1 = (2t + 1)\cdot(-1) - t^2$

つまり $t^2 + 2t = 0$

よって $t(t + 2) = 0$ より $t = 0,\ -2$ である。

これらが，接点の x 座標であり，①に代入することで接線の方程式を求めることができる。

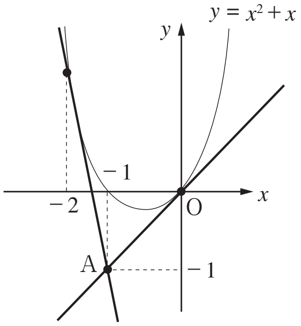
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，求める接線の方程式は，①より

$t=0$ のとき

$t=-2$ のとき

である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

関数　$y=-x^2-2x-3$　のグラフに，点 A$(0,\ 1)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

曲線上にない点から引いた接線

関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて

・ある点 A から引いた接線

・ある点 A を通る接線

を求めるとき，点 A が「接点」であるとは限らない。よって，
接点の x 座標を「　　」などとおき，それを用いて接線の方程式を表し，
その方程式が，点 A を通るときの「 t 」を求め，接線の方程式を求めるとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 関数の増減

要点整理 と 公式

要点❸ 関数の増減と増減表

$1 \leqq x \leqq 2$，$3 < x$ といった「不等式を満たす実数 x の集合」を「区間」という。

関数 $f(x)$ について，ある区間内の任意の x_1，x_2 に対して

$x_1 < x_2$　ならば　$f(x_1) < f(x_2)$

が成り立つとき，$f(x)$ はこの区間で（単調に）「増加」するといい，

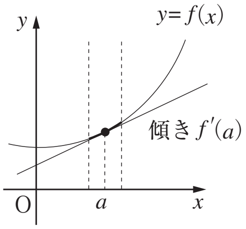
$x_1 < x_2$　ならば　$f(x_1) > f(x_2)$

が成り立つとき，$f(x)$ はこの区間で（単調に）「減少」するという。

（ex）関数 $y = x^2$ は

$x > 0$ の区間では増加し，$x < 0$ の区間では減少する。

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の 1 点 A$(a, f(a))$ に近いところでは，関数のグラフは $x = a$ における接線のグラフとほとんど一致している，と考えることができる。



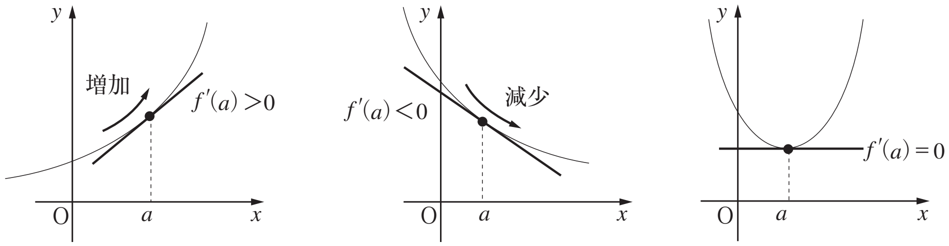
$x = a$ における接線の傾きは「　　　　」であり，$f'(a)$ の値が

正のときは「右上がり」であり，　$x = a$ の付近で $f(x)$ は「増加」

負のときは「右下がり」であり，　$x = a$ の付近で $f(x)$ は「減少」

0 のときは「x 軸に平行」であり，$x = a$ の付近で $f(x)$ は「定数」(増加も減少もしない)

ということがわかる。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

したがって，以下のことがいえる。

■ $f'(x)$ の符号と関数の増減

ある区間で

つねに $f'(x)$　　　ならば，$f(x)$ はその区間で「　　　」する

つねに $f'(x)$　　　ならば，$f(x)$ はその区間で「　　　」する

つねに $f'(x)$　　　ならば，$f(x)$ はその区間で「 定数 」である。

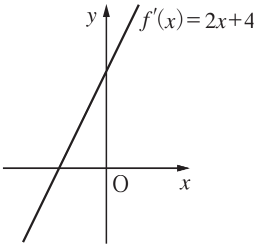
（ex）$f(x) = x^2 + 4x$ の増減を調べる。

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x)$　　　となるのは，$2x + 4 = 0$ より $x = -2$

$x > -2$　のとき　$f'(x)$

$x < -2$　のとき　$f'(x)$



よって，$f'(x)$ の符号および $f(x)$ の増減は

次のような表で表される。

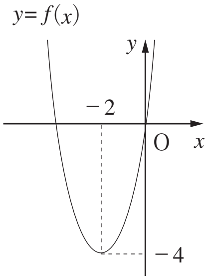
x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$			
$f(x)$			

⇒

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

⇒

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗



関数の増減を表す上記のような表を「　　　　　」という。

表の記号「 ↗ 」は増加を，記号「 ↘ 」は減少を表す。

※$f(x)$ は $x > -2$ の区間で増加しているが，この区間の端を含めて $x \geqq -2$ のときも増加している，といえる。このように増加・減少の範囲については，区間の端を含めてもよく，上記の例では

$f(x)$ は $x \geqq -2$ で増加，$x \leqq -2$ で減少する

といえる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の関数の増減を調べ，増減表を作成せよ。

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2$　　(2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x + 2$

Point Pickup

関数の増減

関数 $y = f(x)$ の増減については，導関数の符号がカギを握る。

増減を調べる主な手順は以下。

① 導関数 $f'(x)$ を求める。

② $f'(x) = 0$ となるような実数 x を求める。

③ ②と $y = f'(x)$ のグラフを元に，$f'(x) > 0$，$f'(x) < 0$ となる x の範囲を求める。

ある区間で

つねに $f'(x) > 0$ ⇒ $f(x)$ はその区間で「　　」する

つねに $f'(x) < 0$ ⇒ $f(x)$ はその区間で「　　」する

つねに $f'(x) = 0$ ⇒ $f(x)$ はその区間で「 定数 」

④ 「増減表」に，$f'(x)$ の符号，$f(x)$ の増減（↗，↘）および値を記入する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 関数の極大・極小

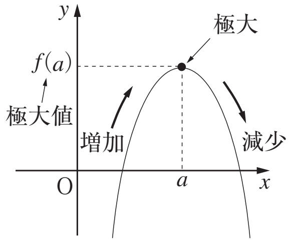
要点整理 と 公式

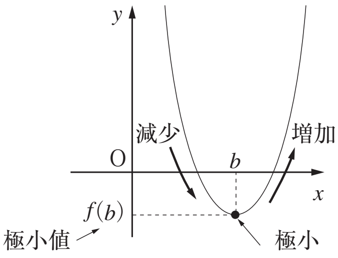
要点4 関数の極大・極小

$y = f(x)$ において x を増加させたとき，$x = a$ の前後で $f(x)$ が増加から減少に転じるとき，$f(x)$ は $x = a$ で「　　　」であるといい，$f(a)$ を「　　　」という。

また，$x = b$ の前後で減少から増加に転じるとき，$f(x)$ は $x = b$ で「　　　」であるといい，$f(b)$ を「　　　」という。

極大値と極小値をあわせて「　　　」という。



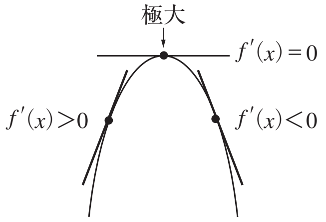


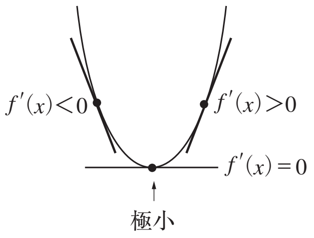
関数 $f(x)$ の値の増減は，$f'(x)$ の符号で調べることができる。ある区間で

$f'(x) > 0$　（$f'(x)$ が正）　⇒　$f(x)$ は増加

$f'(x) < 0$　（$f'(x)$ が負）　⇒　$f(x)$ は減少

である。





$f(x)$ が $x = a$ で極値をとるとき，$f'(a)$　　　である。さらに，$x = a$ の前後で $f'(x)$ の符号が入れ替わる。

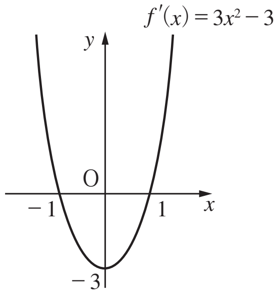
よって，以下のことがいえる。

> **■ 関数の極大・極小**
>
> $f'(a) =$　　　となる $x = a$ の前後で
>
> $f'(x)$ の符号が正から負に転じる　⇒　$f(a)$ は「　　　」
>
> $f'(x)$ の符号が負から正に転じる　⇒　$f(a)$ は「　　　」

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

（ex1）$f(x) = x^3 - 3x + 2$ の増減を調べ，極値を求め，グラフをかく。

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$



$f'(x) = 0$　となるのは　$x = -1,\ 1$　のとき

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

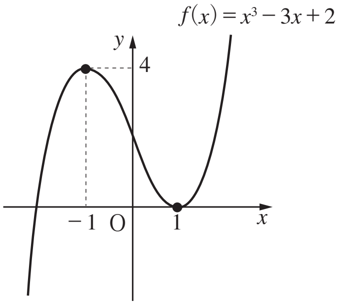
したがって

　$x =$ 　　　のとき　極大値

　$x =$ 　　　のとき　極小値

をとる。

グラフは右図。

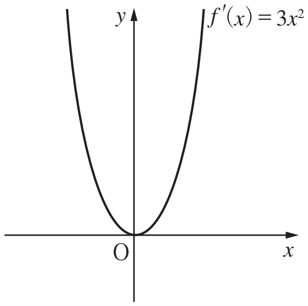


（ex2）$f(x) = x^3$　について

$f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0$　となるのは　$x = 0$　のとき

よって，$f(x)$ の増減は以下。

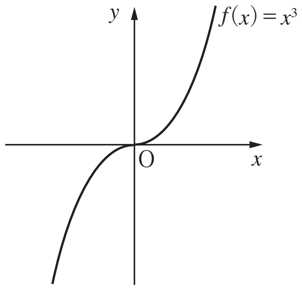


x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

したがって，$f(x)$ はつねに増加し，

$x = 0$ で極値をとらない。

$y = f(x)$ のグラフは右図。



以上より，次のことがいえる。

> $f'(a) = 0$ であっても，$f(a)$ が極値になるとは限らない。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6$　　　(2)　$y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

Point Pickup

関数の極値とグラフ

極値を求め，グラフをかく手順は以下。

①　導関数 $f'(x)$ を求める。

②　$f'(x) = 0$　となるような実数 x を求める。この x が極値をとる x の値の候補。

③　②で求めた x の値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ，増減表をかく。

④　②の x の値の前後で $f'(x)$ の符号変化があれば，$f(x)$ はその x において極値をとる。
　符号変化がなければ，$f(x)$ はその x において極値をとらない。

⑤　③の増減表を元に，グラフをかく。
　②の x の値において，グラフの接線が x 軸と平行となることに注意。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　確認テスト

1 関数 $f(x)=-x^2+2x-3$ について，$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(2,\ -3)$ における接線の傾きは［アイ］であり，接線の方程式は $y=$［アイ］$x+$［ウ］である。

2 関数 $y=x^2+1$ のグラフに点 $(2,\ 1)$ から引いた接線の方程式を求める。接点の x 座標を $x=t$ とおくと，接線の傾きは［エ］t であり，接線の方程式は

$y=$［エ］$tx-t^2+$［オ］と表される。この接線が点 $(2,\ 1)$ を通るとき，$t=0,$［カ］となる。したがって，求める接線の方程式は $y=1,\ y=$［キ］$x-$［クケ］である。

3 関数 $f(x)=x^3-3x$ の増減を調べ，下の増減表を完成せよ。

ただし［ス］～［ツ］は，次の①～④の中から選び，数字で答えよ(同じものを選んでもよい)。

①　＋　　②　－　　③　↗　　④　↘

x	…	コサ	…	シ	…
$f'(x)$	ス	0	セ	0	ソ
$f(x)$	タ	2	チ	-2	ツ

4 関数 $y=-2x^3+3x^2-1$ は，$x=$［テ］で極大値［ト］，$x=$［ナ］で極小値［ニヌ］をとる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　接線の方程式，関数の増減と極大・極小

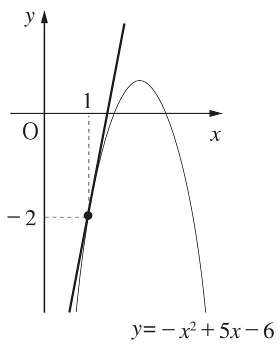
1

［1］ $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ とおくと，$f'(x) = -2x + 5$

よって，$x = 1$ における接線の傾きは $f'(1) = 3$

したがって，点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式は

$y = 3(x - 1) - 2$　　つまり　$y = 3x - 5$



［2］ $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ とおくと，$f'(x) = 4x + 3$

$f'(x) = -5$　より　$4x + 3 = -5$　よって　$x = -2$

また，$f(-2) = 3$ より，接点の座標は $(-2,\ 3)$

よって，求める接線の方程式は

$y = -5(x + 2) + 3$　つまり　$y = -5x - 7$

2

$y = -x^2 - 2x - 3$　より，$y' = -2x - 2$

接点の x 座標を t とおくと，接点の y 座標は $-t^2 - 2t - 3$

また，接線の傾きは　$-2t - 2$

よって，求める接線の方程式は

$y = (-2t - 2)(x - t) - t^2 - 2t - 3$

つまり $y = (-2t - 2)x + t^2 - 3$　……①

この直線が点 A $(0,\ 1)$ を通るので，

$1 = (-2t - 2)\cdot 0 + t^2 - 3$

$t^2 = 4$　　よって　$t = \pm 2$

よって求める接線の方程式は，①より

$t = 2$ のとき　$y = -6x + 1$

$t = -2$ のとき　$y = 2x + 1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

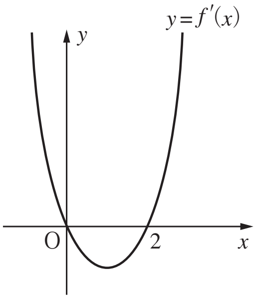
3

(1)　$f(x) = x^3 - 3x^2$　より　$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0$　となるのは　$x = 0,\ 2$ のとき

$f(x)$の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

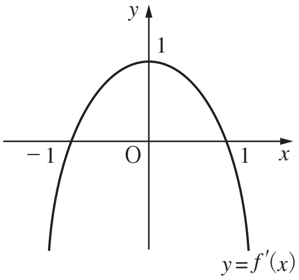


(2)　$f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x + 2$　より　$f'(x) = -x^2 + 1 = -(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$　となるのは　$x = -1,\ 1$ のとき

$f(x)$の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{4}{3}$	↗	$\frac{8}{3}$	↘



4

(1)　$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6$　より　$f'(x) = 9x^2 - 18x = 9x(x-2)$

$f'(x) = 0$　となるのは　$x = 0,\ 2$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下。

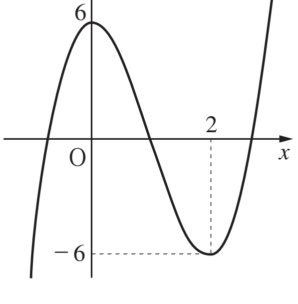
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	-6	↗
		極大		極小	

よって，

$x = 0$ で極大値 6，$x = 2$ で極小値 -6

をとる。

グラフは右図。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$　より　$y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x-1)^2$

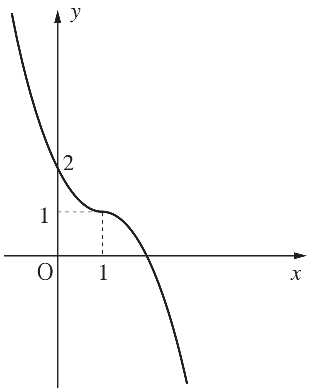
$y' = 0$　となるのは　$x = 1$　のとき

y の増減表は以下。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	↘	1	↘

よって，y はつねに減少し，極値はない。

グラフは右図。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　確認テスト

1 関数 $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ について，$y = f(x)$ のグラフ上の点$(2,\ -3)$ における接線の傾きは［アイ］であり，接線の方程式は $y =$［アイ］$x +$［ウ］である。

2 関数　$y = x^2 + 1$ のグラフに点 $(2,\ 1)$から引いた接線の方程式を求める。接点の x 座標を $x = t$ とおくと，接線の傾きは［エ］t であり，接線の方程式は

$y =$［エ］$tx - t^2 +$［オ］と表される。この接線が点 $(2,\ 1)$ を通るとき，$t = 0$,［カ］となる。したがって，求める接線の方程式は $y = 1$，$y =$［キ］$x -$［クケ］である。

3 関数　$f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べ，下の増減表を完成せよ。

ただし［ス］～［ツ］は，次の①～④の中から選び，数字で答えよ(同じものを選んでもよい)。

①　＋　　②　－　　③　↗　　④　↘

x	…	コサ	…	シ	…
$f'(x)$	ス	0	セ	0	ソ
$f(x)$	タ	2	チ	-2	ツ

4 関数　$y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ は，$x =$［テ］で極大値［ト］，$x =$［ナ］で極小値［ニヌ］をとる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1	ア　－	イ　2	ウ　1		
2	エ　2	オ　1	カ　4	キ　8	
	ク　1	ケ　5			
3	コ　－	サ　1	シ　1		
	ス　①	セ　②	ソ　①	タ　③	
	チ　④	ツ　③			
4	テ　1	ト　0	ナ　0	ニ　－	ヌ　1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。